Μαθημα 8ο 30/4/2018

Ολοκληρωτικες

Ασκηση

Να λυσετε την ολοκληρωτικη εξισωση Volterra

$$y(t) = t + \int_0^t (s-t)\, y(s)\, ds$$

με τη μεθοδο των επαναληπτικων πυρηνων

$$k_1(t,s) = k(t,s) = s-t$$

$$k_2(t,s) = -\frac{1}{3!}(s-t)^3$$

$$k_3(t,s) = \frac{1}{5!}(s-t)^5$$

$$k_4(t,s) = \int_s^t k(t,\xi)\, k_3(\xi,s)\, d\xi = \int_s^t (\xi - t)\frac{(s-\xi)^5}{5!}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{5!}\int_s^t (\xi - t)\left[-\frac{(s-\xi)^6}{6!}\right]' d\xi =$$

$$= \frac{1}{5!}\left[(\xi - t)\frac{-(s-\xi)}{6}\right]_s^t + \frac{1}{5!}\int_s^t \frac{(s-\xi)^6}{6}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{6!}\int_s^t (s-\xi)^6\, d\xi = -\frac{1}{6!}\int_s^t \left[\frac{(s-\xi)^7}{7}\right]' d\xi = -\frac{1}{7!}(s-t)^7$$

οποτε επαγωγικα αποδεικνυεται οτι

$$k_n(t,s) = (-1)^{n-1}\frac{(s-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

και

$$\lim_k \sum_{n=1}^{k} k_n(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(s-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(s-t)^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Οποτε η λυση θα δινεται απο τη σχεση

$$y(t) = f(t) + \int_0^t \sin(s-t)\, f(s)\, ds =$$

$$= t + \int_0^t \sin(s-t) \cdot s\, ds = t + \int_0^t (-\cos(s-t))'\, s\, ds = \dots$$

• Ολοκληρωτικες Εξισωσεις Volterra α' Ειδους

Εστω $f(t) = \lambda \cdot \int_0^t k(t,s)\, y(s)\, ds$

Εαν $k(t,s)$ συνεχης συναρτηση, τοτε παραγωγιζοντας εχουμε

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t k(t,s)\, y(s)\, ds$$

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \lambda \cdot \Big(\frac{\partial t}{\partial t} k(t,t)\, y(t) - \frac{d0}{dt} \cancel{k(t,0)\, y(0)}^{\,0} + \int_0^t \frac{\partial k(t,s)}{\partial t} y(s)\, ds \Big)$$

Αρα

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \lambda\, k(t,t)\, y(t) + \lambda \cdot \int_0^t \frac{\partial k(t,s)}{\partial t}\, y(s)\, ds$$

οποτε

$$\lambda\, k(t,t)\, y(t) = f'(t) - \lambda \int_0^t \frac{\partial k(t,s)}{\partial t}\, y(s)\, ds$$

$$y(t) = \frac{f'(t)}{\lambda k(t,t)} - \int_0^t \left(\frac{1}{k(t,t)} \cdot \frac{\partial k(t,s)}{\partial t} \right) y(s)\, ds$$

Αρα

$$y(t) = g(t) + \int_0^t \Lambda(t,s)\, y(s)\, ds$$

οπου $g(t) = \dfrac{f'(t)}{\lambda\, k(t,t)}$, $\Lambda(t,s) = \dfrac{1}{k(t,t)} \dfrac{\partial k(t,s)}{\partial t}$

~~Παράδειγμα~~

Δίνεται η ολοκληρωτική εξίσωση

$$t = \int_0^t \cos(t-s)\, y(s)\, ds \quad , \quad [0, b]$$

Να αναγάγετε την ολοκληρωτική εξίσωση αυτή σε ολοκληρωτική εξίσωση Volterra β' είδους

Απάντηση

εφόσον $k(t,s) = \cos(t-s)$ είναι συνεχής για $t, s \in [0, b]$

Με παραγώγιση έχουμε

$$\frac{dt}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^t \cos(t-s)\, y(s)\, ds$$

$$1 = \frac{\partial t}{\partial t} \cdot \cos(t-t)\, y(t) - \frac{\partial 0}{\partial t} \cdot \cos(t-0)\, y(0) + $$

$$+ \int_0^t (-\sin(t-s))\, y(s)\, ds$$

Άρα

$$1 = y(t) - \int_0^t \sin(t-s)\, y(s)\, ds$$

$$y(t) = 1 + \int_0^t \sin(t-s)\, y(s)\, ds$$

Κεφάλαιο 3ο : Συναρτήσεις Green

Θεωρούμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$P_0(t)\, y''(t) + P_1(t)\, y'(t) + P_2(t)\, y(t) = f(t)$$

όπου P_0, P_1, P_2 και f είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$

Εάν $f(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$ τότε λέμε ότι έχουμε μια ομογενή Δ.Ε ενώ διαφορετικά λέμε ότι έχουμε μια μη ομογενή Δ.Ε

Ορίζουμε έναν τελεστή L (οποίος δρα σε συναρτήσεις που έχουν παραγώγους τουλάχιστον έως 2ης τάξης ως εξής

$$Lu(t) = \left[P_0(t) \frac{d^2}{dt^2} + P_1(t) \frac{d}{dt} + P_2(t) \right] u(t)$$

Με τη βοήθεια αυτού του τελεστή η Δ.Ε μπορεί να γραφεί ως εξής

$$Lu(t) = f(t)$$

Ο τελεστής L είναι ένας γραμμικός τελεστής διότι αν c_1, c_2 σταθερές και u_1, u_2 είναι συναρτήσεις που έχουν έως και 2ης τάξης παράγωγο έχουμε

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L u_1 + c_2 L u_2$$

Επίσης αν y_1, y_2 είναι οι λύσεις της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε τότε οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός τους είναι επίσης λύση της ομογενούς

Θεωρημα

Εαν $p_0(t)\, y''(t) + p_1(t)\, y'(t) + p_2(t)\, y(t) = f(t)$ (E)
μια γραμμικη Δ.Ε και p_0, p_1, p_2, f ειναι συνεχεις συναρτησεις σε ενα διαστημα I και $p_0(t) \neq 0$ $\forall t \in I$, επισης $t_0 \in I$ τοτε για οποιεσδηποτε σταθερες c_1, c_2 υπαρχει ακριβως μια λυση της (E) η οποια ειναι ορισμενη στο διαστημα I και ικανοποιει τις αρχικες συνθηκες

$$y(t_0) = c_1 \,,\; y'(t_0) = c_2$$

- Ειδικα για την αντιστοιχη ομογενη (E_0) απο το θεωρημα εξασφαλιζεται οτι υπαρχει ακριβως μια λυση y που ικανοποιει τις συνθηκες

$$y(t_0) = 0 \quad \text{και} \quad y'(t_0) = 0 \qquad (*)$$

και επειδη η $y(t) = 0$, $\forall t \in I$ ικανοποιει την (E_0) και τις συνθηκες (*) επεται οτι ειναι μοναδικη λυση

- Εαν εχουμε τη Δ.Ε (E) με $p_0(t) \neq 0$ $\forall t \in I$ τοτε διαιρωντας με $p_0(t)$ και τα δυο μελη της Δ.Ε (E) προκυπτει

$$y''(t) + \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\, y'(t) + \frac{p_2(t)}{p_0(t)}\, y(t) = \frac{f(t)}{p_0(t)} \qquad (E')$$

Η εξισωση (E') εχει τις ιδιες λυσεις με την (E) και η E ειναι της μορφης

$$y''(t) + q(t)\, y'(t) + r(t)\, y(t) = g(t) \qquad (**)$$

- Εαν q και r ειναι πραγματικες σταθερες συναρτησεις τοτε για την ομογενη της (**) μπορουμε να βρουμε δυο γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις βρισκοντας τις λυσεις της

$$\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

• $\Delta > 0$ έχουμε 2 πραγματικές λύσεις λ_1, λ_2 και $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ αποτελούν το βασικό σύνολο λύσεων

• $\Delta = 0$ τότε έχουμε μια πραγματική λύση λ_0 τότε οι $e^{\lambda_0 t}$ και $te^{\lambda_0 t}$ ένα Β.Σ.Λ

• $\Delta < 0$ τότε $z_1 = \sigma + i\tau$, $z_2 = \sigma - i\tau$ και $e^{\sigma t}\cos(\tau t)$ και $e^{\sigma t}\sin(t\tau)$ αποτελούν ΒΣΛ

▶ Έχουμε τη Δ.Ε

$$y''(t) + q(t)\,y'(t) + r(t)\,y(t) = 0$$

και τις συνθήκες

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) + c_3 y(b) + c_4 y'(b) = \xi$$
$$d_1 y(b) + d_2 y'(b) + d_3 y(a) + d_4 y'(a) = n$$

όπου c_i δεν είναι όλα μηδέν και d_i δεν είναι όλα μηδέν.

Αυτό αποτελεί ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών

Οι συνοριακές συνθήκες λέγονται ομογενείς αν $\xi = n = 0$

Οι συνοριακές συνθήκες λέγονται διαχωρισμένες εάν $c_3 = c_4 = d_3 = d_4 = 0$

Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών της μορφής

$$a_2(t)\,y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

με $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$
$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$ } δηλ διαχωρισμένες συνοριακές συνθ

με a_i όχι όλα μηδέν και b_i όχι όλα μηδέν

έχει η μια η άπειρες λύσεις

Ορισμός

Εαν $y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες τοτε η $W(y_1,y_2) : [a,b] \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$W(t) = W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

ονομάζεται συνάρτηση Wronski των y_1, y_2

- Εαν y_1, y_2 δυο λύσεις της ομογενους Δ.Ε

$$y''(t) + q(t)\,y'(t) + r(t)\,y(t) = 0$$

οπου η q ειναι συνεχης στο διαστημα I, τοτε η συνάρτηση Wronski των y_1, y_2 ή ειναι παντου 0 στο I ή δεν μηδενίζεται πουθενα.

απόδειξη

Εφοσον y_1, y_2 ειναι λύσεις ικανοποιουν την ομογενη Δ.Ε, οποτε

$$\left.\begin{array}{ll} y_1''(t) + q(t)\,y_1'(t) + r(t)\,y_1(t) = 0 & (\cdot\, y_2(t)) \\ y_2''(t) + q(t)\,y_2'(t) + r(t)\,y_2(t) = 0 & (\cdot\, y_1(t)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1''(t)\,y_2(t) + q(t)\,y_1'(t)\,y_2(t) + r(t)\,y_1(t)\,y_2(t) = 0 \\ y_2''(t)\,y_1(t) + q(t)\,y_2'(t)\,y_1(t) + r(t)\,y_2(t)\,y_1(t) = 0 \end{array}\right\} (-)$$

Αφαιρωντας κατα μέλη προκυπτει ② − ①

$$y_2''(t)\,y_1(t) - y_1''(t)\,y_2(t) + q(t)\left[\,y_2'(t)\,y_1(t) - y_1'(t)\,y_2(t)\,\right] = 0$$

$$W'(t) + q(t)\,W(t) = 0$$

$$\left[\,e^{\int_a^t q(s)\,ds}\,W(t)\,\right]' = C'$$

$$W(t) = C\,e^{-\int_a^t q(s)\,ds}, \quad t \in I$$

οποτε η θα εχουμε $C = 0$ αρα $W(t) = 0 \ \forall t \in I$ ή δεν θα μηδενίζεται πουθενα στο I

Ορισμος

Εστω $f_1, f_2, \dots, f_k$ συναρτησεις ορισμενες σε ενα διαστημα I, θα λεμε οτι οι $f_1, f_2, \dots, f_k$ ειναι γραμμικα εξαρτημενες εαν υπαρχουν σταθερες c_i, $i \in \{1, \dots, k\}$ τ.ω $(c_1, \dots, c_k) \neq (0, \dots, 0)$ ετσι ωστε

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k = 0$$

Εαν η ισοτητα

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k = 0$$

ισχυει μονο αν $c_1 = c_2 = \dots = c_k$ τοτε το συνολο των συναρτησεων $f_1, f_2, \dots, f_k$ λεγεται γρ. ανεξαρτητο συνολο συναρτησεων

- Εαν οι $f_1, \dots, f_k$ εχουν εως $(k-1)$-ταξης παραγωγους τοτε για τον ελεγχο της γραμμικης ανεξαρτησιας βοηθα η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ f_1' & f_2' & \dots & f_k' \\ \vdots & \vdots & & \\ f_1^{(k-1)} & f_2^{(k-1)} & \dots & f_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Scanned by CamScanner

Λημμα

Εαν y_1, y_2 ειναι παραγωγισιμες συναρτησεις ορισμενες στο $[a,b]$, εαν y_1, y_2 ειναι γραμμικα εξαρτημενες, τοτε

$$W(y_1,y_2)(t)=0 \quad \forall t\in[a,b]$$

▲ Αυτοσυζυγεις διαφορικοι τελεστες

Εχουμε την εξης ομογενη Δ.Ε

$$p(t)\,y''(t)+q(t)\,y'(t)+y(t)\,r(t)=0$$

οπου οι p,q,r ειναι πραγματικες συναρτησεις και η q εχει συνεχη παραγωγο πρωτης ταξης σε ενα διαστημα $[a,b]:=I$ και p εχει συνεχη παραγωγο δευτερης ταξης στο I

Θεωρουμε τον τελεστη

$$Ly(t)=\left[p(t)\frac{d^2}{dt^2}+q(t)\frac{d}{dt}+r(t)\right]y(t)$$

Τοτε ο τελεστης

$$L^*\phi(t)=(-1)^2\,(p(t)\phi(t))''-(q(t)\phi(t))'+r(t)\phi(t)=$$

$$=p(t)\phi''(t)+(2p'(t)-q(t))\phi'(t)+(p''(t)-q'(t)+r(t))\phi(t)$$

Ειναι ο συζυγης τελεστης του L

Ενας τελεστης L θα λεγεται αυτοσυζυγης εαν

$$L=L^*$$

Στην περιπτωση του τελεστη L που ορισαμε εχουμε οτι ο L ειναι ο αυτοσυζυγης εαν

$$\left\{\begin{array}{l} q(t)=2p'(t)-q(t) \\ p''(t)-q'(t)+r(t)=r(t) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2p'(t)=2q(t) \\ p''(t)=q'(t) \end{array} \Rightarrow$$

$$p'(t)=q(t) \quad \forall t\in I \Rightarrow p'=q$$

Αρα πρεπει $q=p'$

Scanned by CamScanner

Εαν λοιπον ο L ειναι αυτοσυζυγης

$$Ly(t) = p(t)y''(t) + q(t)y'(t) + r(t)y(t)$$
$$= (p(t)y'(t))' + r(t)y(t)$$

Θεωρημα

Εστω η ομογενης γραμμικη Δ.Ε

$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t) = 0$$

οπου a_0, a_1, a_2 ειναι συνεχεις πραγματικες συναρτησεις στο I και $a_2(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

Εαν $t_0 \in I$ και

$$p(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds\right), \quad t \in I$$

$$q(t) = \frac{a_0(t)}{a_1(t)} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds\right)$$

και φανερα p θετικη συναρτηση τοτε η αρχικη Δ.Ε ειναι ισοδυναμη με την

$$(py')' + q(t)y(t) = 0$$

Προβλημα ιδιοτιμων για αυτοσυζυγη τελεστη

Ενα προβλημα Sturm-Liouville ειναι μια Δ.Ε της μορφης

$$(py')' + (q + \lambda r)y = 0 \quad (E_\lambda)$$

οπου p, q ειναι πραγματικες συναρτησεις ορισμενες σε ενα διαστημα $[a, b]$ και p θετικη με συνεχη παραγωγο στο $[a, b]$, q συνεχης στο $[a, b]$ και r συνεχης στο $[a, b]$. Επισης λ ειναι μια παραμετρος (που δεν εξαρταται απο το t) μαζι με ενα ζευγος συνοριακων συνθηκων της μορφης

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \qquad (C)$$
$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

οπου a_1, a_2 πραγματικες σταθερες που δεν ειναι ολες μηδεν
και b_1, b_2 πραγματικες σταθερες που δεν ειναι ολες μηδεν

Για καθε τιμη του λ το προβλημα $(E_0)-(C)$ εχει λυση
τη μηδενικη. Μια τιμη της παραμετρου λ για την οποια
το $(E_0)-(C)$ εχει και μη μηδενικες λυσεις θα λεμε οτι
ειναι μια ιδιοτιμη για το $(E_0)-(C)$
Επισης εαν λ_0 ειναι μια ιδιοτιμη για το $(E_0)-(C)$
τοτε μια μη μηδενικη λυση y_0 του $(E_0)-(C)$ για $\lambda=\lambda_0$
θα λεμε οτι ειναι μια ιδιοσυναρτηση του $(E_0)-(C)$
που αντιστοιχει στην ιδιοτιμη λ_0

Θεωρημα
Εαν εχουμε το προβλημα συνοριακων τιμων $(E_0)-(C)$ τοτε
αν y_0 ειναι μια ιδιοσυναρτηση που αντιστοιχει σε
καποια ιδιοτιμη τοτε ολες οι ιδιοσυναρτησεις που αντιστοιχουν
στην ιδια ιδιοτιμη ειναι ακριβως cy_0 οπου c ειναι σταθερα
με $c\neq 0$

• Ειδαμε οτι εαν για ενα τελεστη της μορφης
$Ly(t) = p(t)\, y''(t) + q(t)\, y'(t) + r(t)\, y(t)$
αυτος ειναι αυτοσυζυγης οταν $p'=q$
και τοτε παιρνει τη μορφη $Ly = (py')' + ry$

Εαν ομως ο L δεν ειναι αυτης της μορφης μπορει να
μετασχηματιστει καταλληλα σε εναν αυτοσυζυγη τελεστη
πολλαπλασιαζοντας με μια καταλληλη συναρτηση $k(t)$

Scanned by CamScanner

Τοτε

$\bar{L} = y(t) = \kappa(t)\, p(t)\, y''(t) + \kappa(t)\, q(t)\, y'(t) + \kappa(t)\, r(t)$

Ο $\bar{L}$ θα ειναι αυτοσυζυγης εαν $\bar{L}^{+} = \bar{L}$

που αυτο θα ισχυει αν

$\kappa(t)\, q(t) = (\kappa(t)\, p(t))' \Rightarrow$

$\kappa(t)\, q(t) = \kappa'(t)\, p(t) + \kappa(t)\, p'(t)$

απο εδω προκυπτει

$$\kappa'(t) + \kappa(t) \underbrace{\left[\frac{p'(t)}{p(t)} - \frac{q(t)}{p(t)} \right]}_{p(t)} = 0 \quad (\Delta)$$

Η (Δ) ειναι μια ομογενης γραμμικη Δ.Ε πρωτης ταξης με αγνωστη συναρτηση την κ οποτε

$$\kappa(t) = c \cdot \frac{1}{p(t)} \exp\left[\int \frac{q(t)}{p(t)}\, dt \right]$$